

時間領域有限体積法による非構造格子汎用音場数値解析コードの開発 (2) 非直交格子補正および実数音響インピーダンス境界条件に関する検討

A finite-volume time-domain approach for unstructured grid general-purpose computational acoustics software development part 2:
study on nonorthogonal corrections and acoustic real impedance boundary conditions

大嶋拓也

Takuya OSHIMA
新潟大学工学部

今野雅

Masashi IMANO
東京大学大学院工学系研究科

Faculty of Engineering, Niigata University School of Engineering, The University of Tokyo

内容梗概: 前報 [1] で提案した時間領域有限体積法 (FVTD 法) を用いた非構造格子音場数値解析手法について、非直交格子における数値振動誘発要因であった非直交補正手法の検討および、実用上重要な境界条件である実数法線方向音響インピーダンス境界条件について検討を行った。非直交格子補正手法は Jasak[2] の提案による 3 手法を検討したものの、有効な改善は見られれずさらなる検討が必要である。一方音響インピーダンス境界条件については、空間方向および時間方向各 3 とおりの離散化を組合せた 9 とおりの定式化を一次元・二次元・三次元問題において検討した。その結果、代数型・Crank-Nicholson スキームの組合せ手法が最善であった。

1 緒言

前報 [1] では時間領域有限体積法 (FVTD 法) を用いた非構造格子音場数値解析手法の導出および実装を行った。本報では、前報において課題として残された非直交格子における非直交補正手法、および実用上重要な境界条件である実数法線方向音響インピーダンス境界条件について検討を行ったので報告する。

2 非直交格子補正式の導出

2.1 基礎方程式

音速 c_0 の静止気体中における音響伝搬を表す速度ポテンシャル形式の波動方程式は以下である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \phi \quad (1)$$

ここで音圧 p および粒子速度 \mathbf{u} は以下で表される。

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = -\nabla \phi \quad (3)$$

ただし ρ は空気密度である。

Eq. (1) の両辺を Fig. 1 のような非構造格子を構成する時間不変な体積 V のコントロールボリューム (以下 CV) に対して積分し、時間方向中心差分によって離散化すると、左辺は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \phi dV \approx \frac{\phi^{n+1} - 2\phi^n + \phi^{n-1}}{\Delta t^2} V$$

ただし Δt は時間刻み、右肩添字は時刻ステップを表す。一方、右辺については、ガウスの発散定理より以下となる。

$$\begin{aligned} \int_V c_0^2 \nabla^2 \phi dV &= c_0^2 \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \phi \\ &\approx c_0^2 \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f \end{aligned} \quad (4)$$

ここで f は多面体 CV 表面を構成する各面を表す。また \mathbf{S}_f は f における面積ベクトルであり、以下で定義される。

$$\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}_f$$

ここで S_f は面 f の面積、 \mathbf{n}_f は面 f の CV 外向き単位法線ベクトルである。

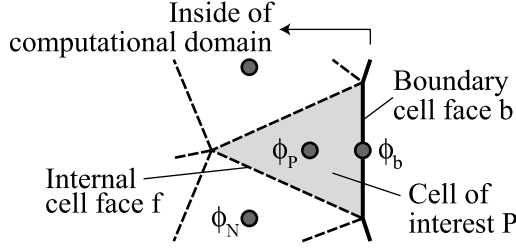


Fig. 1: Unstructured mesh system.

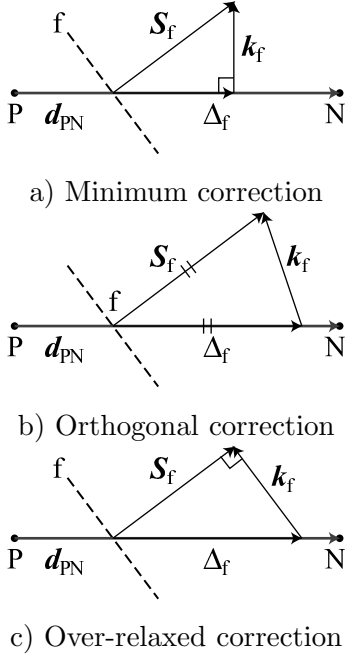


Fig. 2: Non-orthogonal mesh treatment vectors.

当該 CV P および f における隣接 CV N の中心を結ぶベクトル \mathbf{d}_{PN} が \mathbf{S}_f と平行であるとき、Eq. (4) 最右辺の CV 表面 f における ϕ の勾配は ϕ の f における法線方向勾配 $\partial\phi/\partial n_f$ によって表され、さらに ϕ_N および ϕ_P を用いて以下のように差分化される。

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla\phi)_f \approx S_f \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}_{PN}|} \quad (5)$$

2.2 非直交格子補正

非平行時は、 \mathbf{S}_f を直交成分 Δ_f および非直交成分 \mathbf{k}_f に分解して

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla\phi)_f = \Delta_f \cdot (\nabla\phi)_f + \mathbf{k}_f \cdot (\nabla\phi)_f$$

と表す。上式右辺第一項の直交成分に関しては Eq. (5) と同様に

$$\Delta_f \cdot (\nabla\phi)_f = |\Delta_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}_{PN}|}$$

によって算出される。第二項の $(\nabla\phi)_f$ は、CV P および N における CV 中心の ϕ の勾配を補間して

$$(\nabla\phi)_f = f_x(\nabla\phi)_P + (1 - f_x)(\nabla\phi)_N \quad (6)$$

で与えられる。補間係数 f_x および $(\nabla\phi)_P$ は以下で求められる。

$$f_x = \frac{\overline{fN}}{|\mathbf{d}_{PN}|},$$

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_P &= \frac{1}{V} \int_S d\mathbf{S} \phi \\ &\approx \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{S}_f \phi_f \end{aligned}$$

ここで ϕ_f は Eq. (6) と同様に、CV 中心の値を界面に補間して求められる。

Δ_f および \mathbf{k}_f の決定法は任意性を有するが、Jasak [2] によって以下 3 手法が提案され、それぞれ図式的には Fig. 2 に示す関係を表している。

Minimum correction:

$$\Delta_f = \frac{\mathbf{d}_{PN} \cdot \mathbf{S}_f}{|\mathbf{d}_{PN}|^2} \mathbf{d}_{PN} \quad (7)$$

Orthogonal correction:

$$\Delta_f = \frac{\mathbf{d}_{PN}}{|\mathbf{d}_{PN}|} S_f \quad (8)$$

Over-relaxed correction:

$$\Delta_f = \frac{\mathbf{d}_{PN}}{\mathbf{d}_{PN} \cdot \mathbf{S}_f} S_f^2 \quad (9)$$

なお \mathbf{k}_f は以下で算出される。

$$\mathbf{k}_f = \mathbf{S}_f - \Delta_f$$

Jasak は 10° から 60° の傾斜メッシュにおける Laplace 方程式数値解の検討結果から、Over-relaxed correction が最善としている。しかしながら典型的な四面体非構造格子の非直交性は平均 20° 程度と比較的小さく、また波動方程式における特性も未知であることから、上 3 式を改めて検討する。

3 非直交格子補正法の検討

3.1 解析条件

前報同様、Fig. 3 に示す AIJ-BPCA ベンチマーク問題 [3] の B0-1T (時間領域立方体内部問題) を四面体非構造格子にて $t = 0.04$ s まで解析し、受音点 R2 における音圧時間波形を求めた。解析条件は前報の四面体非構造格子ケースと同様、CV 数

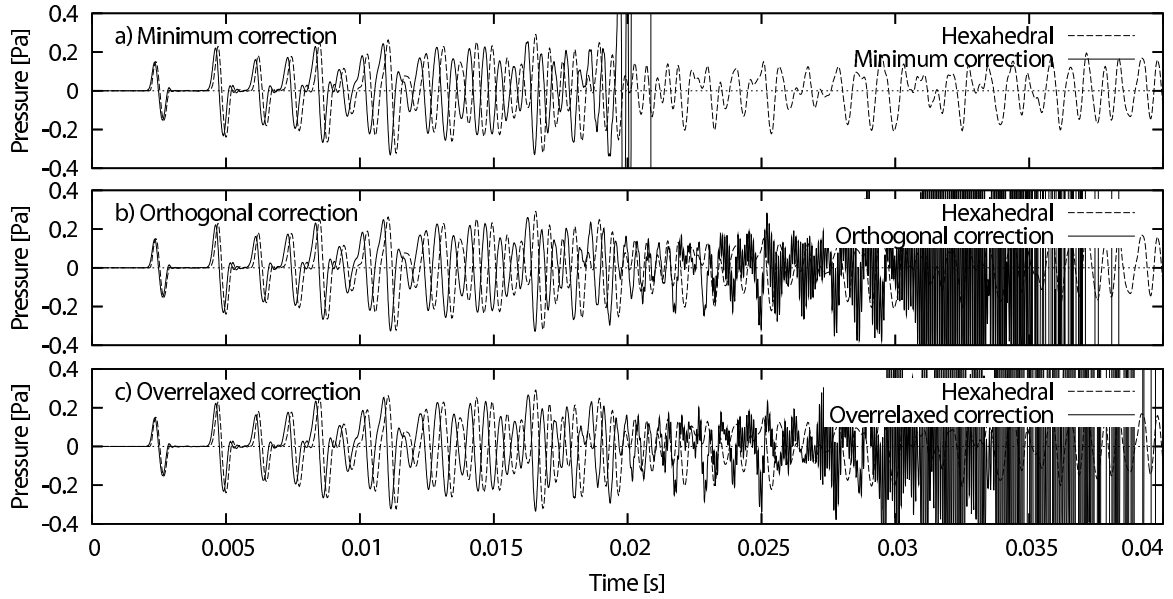


Fig. 4: Sound pressure waveforms at R2 with different nonorthogonal correction approaches.

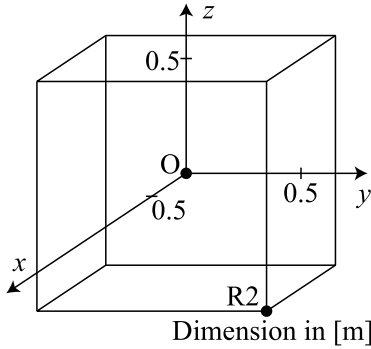


Fig. 3: Problem geometry of the benchmark problem AIJ-BPCA B0-1T.

531 333、 $\Delta t = 0.0049$ ms (最大 Courant 数 0.99) である。その他の解析条件詳細は前報を参照されたい。

3.2 解析結果

Fig. 4 に、Eqs. (7)–(9) による補正を行って得られた受音点 R2 における音圧時間波形を示す。また比較のため、各ケースの音圧時間波形に、前報における六面体直交格子による、FDTD 法と同一となった解析結果も併せて示す。解析結果から、Minimum correction では時刻 0.02 s 付近で急速に発散、その他のケースでも概ね同時刻から数値振動が次第に拡大しており、有効な補正となっていない。したがって有効な補正法については今後も引き続き検討が必要である。

4 実数音響インピーダンス境界条件式の導出

4.1 基礎式

境界面における法線方向粒子速度を u_b 、法線方向音響インピーダンスを z とすると

$$z = \frac{p}{u_b}$$

であるから、Eqs. (2), (3) より、境界条件基礎式は以下の移流方程式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_b} = -\frac{1}{c_b} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (10)$$

ただし

$$c_b = \frac{z}{\rho}$$

である。

4.2 離散化

Fig. 1 の格子において、Eq. (10) を空間方向・時間方向各 3 とおりの組合せで離散化し、時刻ステップ $n+1$ および境界面中心点 b における ϕ の法線方向勾配、すなわち $\partial \phi / \partial n_b|^{n+1}$ を求める。以下、 ϕ に対する右肩添字を時刻ステップ、右下添字の P 、 b はそれぞれ境界最近傍 CV 中心および境界面中心における ϕ の値とし、 Δt 、 Δn はそれぞれ時間刻みおよび CV 中心点 P から境界面 b の距離である。時刻ステップ $n+1$ において ϕ_P^{n+1} は既知、 ϕ_b^{n+1} は未知とする。離散化式を空間方向離散化法ごとに大分類して示す。

4.2.1 風上型

Fig. 1 の ϕ_P における時間差分を近似的に ϕ_b における差分と看做す。

時間方向中心差分 (Case U-C) Eq. (10) の右辺時間微分を時刻ステップ $n + 1/2$ における二次精度中心差分で離散化した式である。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = -\frac{1}{c_b} \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} \quad (11)$$

上式では左辺が点 b、時刻ステップ $n + 1$ において定義されているのに対し、右辺は点 P および時刻ステップ $n + 1/2$ を差分化中心点としており、両辺間の時空間的な離散化位置が一致しない。

2次精度後退差分 (Case U-B) 時間微分を時刻ステップ $n + 1$ における二次精度後退差分 [4] で離散化した式である。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = -\frac{1}{c_b} \frac{3\phi_P^{n+1} - 4\phi_P^n + \phi_P^{n-1}}{2\Delta t} \quad (12)$$

時間方向の離散化位置は時刻ステップ $n + 1$ で一致しているが、空間方向は左辺が点 b、右辺が点 P と異なっている。

Crank-Nicholson 型差分 (Case U-CN) 時間微分を時刻ステップ $n + 1/2$ における二次精度中心差分で離散化し、左辺の空間微分についても時刻ステップ $n + 1/2$ における値を二次精度で補間した式である。

$$\frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^n \right) = -\frac{1}{c_b} \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} \quad (13)$$

時間方向の離散化位置は時刻ステップ $n + 1/2$ で一致しているが、空間方向は左辺が点 b、右辺が点 P と異なっている。上式を変形して以下を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = -\frac{2}{c_b} \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^n \quad (14)$$

4.2.2 予測子-修正子型

Eqs. (11), (12), (14) で算出された $\partial\phi/\partial n_b|^{n+1}$ は CV 中心 P における値であるから、これを $\partial\phi/\partial n_b|_P^{n+1}$ とする。これを用いて境界面上時刻ステップ $n + 1$ における ϕ の値を、予測子

$$\phi_*^{n+1} = \phi_P^{n+1} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} \Delta n \quad (15)$$

として求め、さらに境界面法線方向に予測子-修正子法 [4] を適用して $\partial\phi/\partial n_b|^{n+1}$ を求める。

時間方向中心差分 (Case PC-C) 風上型と同様に

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} = \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{c_b \Delta t}$$

とし、Eq. (15) に代入して得られた ϕ_b^* によって以下のように修正解を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} - \frac{\phi_*^{n+1} - \phi_b^n}{c_b \Delta t} \right)$$

上式の計算に必要な ϕ_b^n は、下式によって得る (以下同様)。

$$\phi_b^n = \phi_P^n + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^n \Delta n \quad (16)$$

時間方向の離散化位置が $1/2$ ステップ異なる。

2次精度後退差分 (Case PC-B) 風上型と同様に

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} = -\frac{3\phi_P^{n+1} - 4\phi_P^n + \phi_P^{n-1}}{2c_b \Delta t}$$

とし、Eq. (15) に代入して得られた ϕ_*^{n+1} によって以下の修正解を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} - \frac{3\phi_*^{n+1} - 4\phi_b^n + \phi_b^{n-1}}{2c_b \Delta t} \right)$$

時間方向・空間方向共に離散化位置が一致する。

Crank-Nicholson 型差分 (Case PC-CN) 風上型における $\partial\phi/\partial n_b|^{n+1}$ を $\partial\phi/\partial n_b|_P^{n+1}$ に置き換えて

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} = -\frac{2}{c_b} \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^n$$

とし、Eq. (15) に代入して得られた ϕ_*^{n+1} によって以下の修正解を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^{n+1} - \frac{2}{c_b} \frac{\phi_*^{n+1} - \phi_b^n}{\Delta t} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|_P^n \right)$$

時間方向・空間方向共に離散化位置が一致する。

4.2.3 代数型

Eq. (10) における左辺を

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{\phi_b^{n+1} - \phi_P^{n+1}}{\Delta n}$$

と離散化し、右辺は風上型が CV 中心 P において離散化したのに対し、本来の境界面 b において離散化する。さらに代数的な式の整理によって $(\phi_b^{n+1} - \phi_P^{n+1})/\Delta n$ 、すなわち $\partial\phi/\partial n_b|^{n+1}$ を求

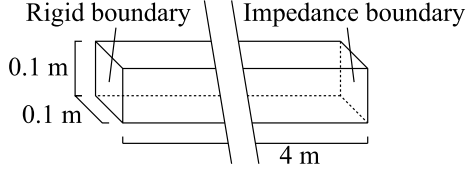


Fig. 5: Geometry of one-dimensional tube.

める。離散化位置は予測子-修正子法と同様である。

時間方向中心差分 (Case A-C) Eq. (10) の離散化式は以下である。

$$\frac{\phi_b^{n+1} - \phi_P^{n+1}}{\Delta n} = -\frac{1}{c_b} \frac{\phi_b^{n+1} - \phi_b^n}{\Delta t}$$

上式を整理して以下を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{\phi_b^n + \phi_P^{n+1}}{c_b \Delta t + \Delta n}$$

上式に必要な ϕ_b^n は Eq. (16) によって得る (以下同様)。

2次精度後退差分 (Case A-B) Case A-C と同様にして、以下を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{4\phi_b^n - \phi_b^{n-1} - 3\phi_P^n}{2c_b \Delta t + 3\Delta n}$$

Crank-Nicholson 型差分 (Case A-CN) 離散化式は以下である。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\phi_b^{n+1} - \phi_P^{n+1}}{\Delta n} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^n \right) = -\frac{1}{c_b} \frac{\phi_b^{n+1} - \phi_b^n}{\Delta t}$$

上式を整理して以下を得る。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^{n+1} = \frac{2}{c_b \Delta t + 2\Delta n} (\phi_b^n - \phi_P^{n+1}) - \frac{c_b \Delta t}{c_b \Delta t + 2\Delta n} \left. \frac{\partial \phi}{\partial n_b} \right|^n \quad (17)$$

5 実数法線方向インピーダンス境界条件式の検討

5.1 一次元問題

5.1.1 解析条件

垂直入射条件における解析として、Fig. 5 に示す音響管を離散化幅 0.1 m で等間隔に離散化し、解析領域右端の境界を音響インピーダンス ρc に対応する移流方程式型境界条件、それ以外の境界を剛壁とした。時間刻み Δt は Courant 数 1.0 に対応する 0.291 ms とした。初期条件として解析領域左端から 5 格子幅を半波とする余弦波型パルス

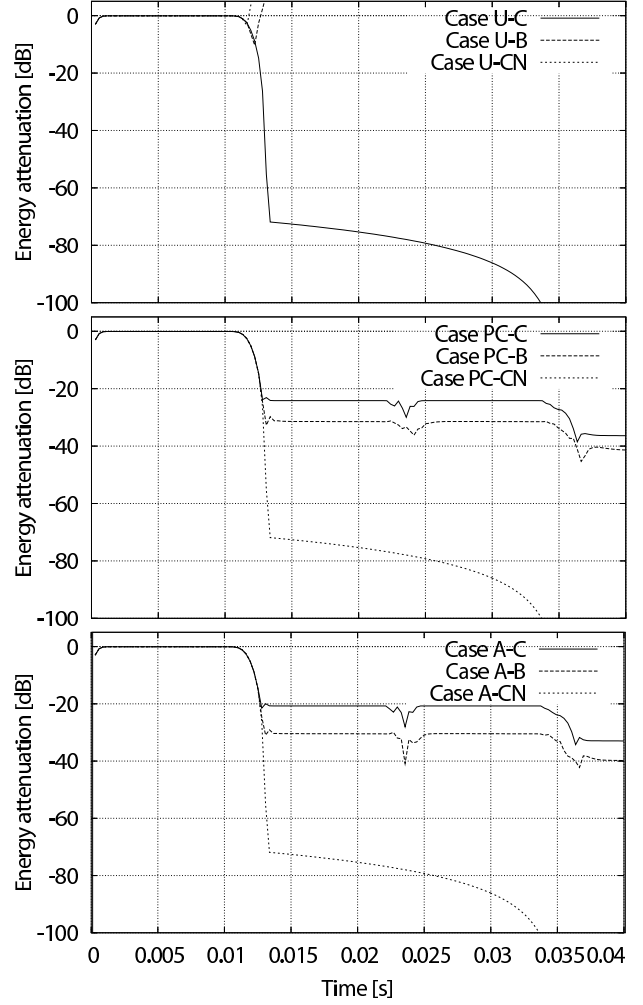


Fig. 6: Attenuation of total acoustic energy over time.

与えた。

5.1.2 結果

Fig. 6 に音場全体の音響エネルギーの時間変化を示す。Cases U-C, PC-CN, A-CN が $t = 0.01$ s 以降に端部に到達した波面の境界面における吸収により、音響エネルギーがほぼ同一の良好な減衰を示している。それに対し、Cases PC-C, PC-B, A-C, A-B は減衰幅が小さく、Cases U-B, U-CN では発散が見られる。

5.2 二次元問題

5.2.1 解析条件

二次元等間隔直交格子における解析として、文献 [5] と同様な解析領域および条件による解析を行った。Fig. 7 に示す解析領域を、格子幅 0.05 m で直交直線格子分割した。解析領域周囲の境界は

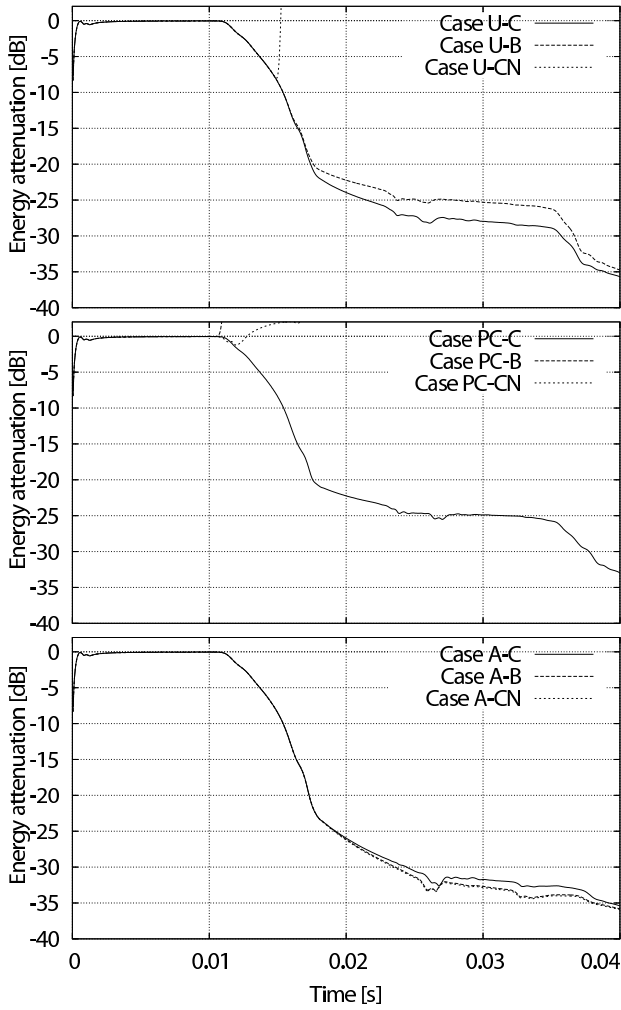


Fig. 8: Attenuation of total acoustic energy over time ($\Delta t = 0.05$ ms).

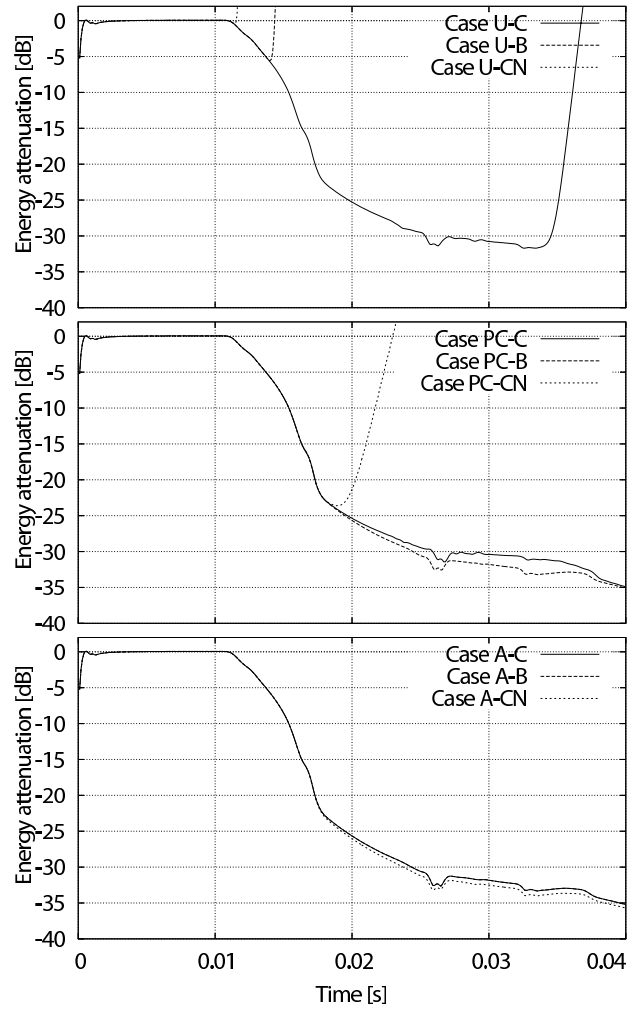


Fig. 9: Attenuation of total acoustic energy over time ($\Delta t = 0.1$ ms).

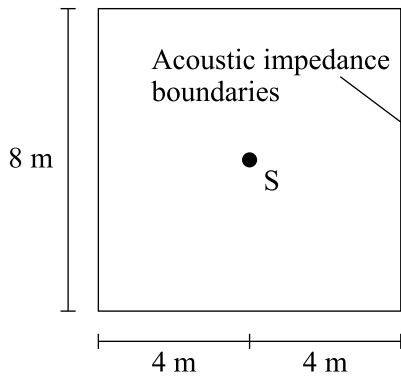


Fig. 7: Geometry of computational domain.

全て音響インピーダンス ρc に対応する移流方程式型境界条件とした。時間刻み Δt は 0.05 ms、0.1 ms (それぞれ Courant 数 0.486, 0.972) の 2 種とした。初期条件として解析領域中心 (Fig. 7 中の点 S) に 10 格子幅を半径とする余弦波型パルスを与

えた。

5.2.2 結果

Figs. 8, 9 に、それぞれ $\Delta t = 0.05$ ms、0.1 ms としたときの音場全体の音響エネルギーの時間変化を示す。 $\Delta t = 0.05$ ms 時に発散したのは Cases U-CN、PC-B、PC-CN の 3 ケースであり、離散化の次数に関して高精度なケースほど発散しやすくなっている。代数型の 3 ケース (Cases A-C、A-B、A-CN) は全て発散は見られず、Cases A-B、A-CN の 2 ケースでほぼ同等の最も良好な減衰が得られている。一方 $\Delta t = 0.1$ ms の場合は上流型の全てのケース (Cases U-C、U-B、U-CN) および Case PC-CN で発散が見られた。代数型は全てのケースで発散が見られず、Case A-CN が全ケース中唯一 0.04 s において -35 dB 以下の良好な減衰を示して

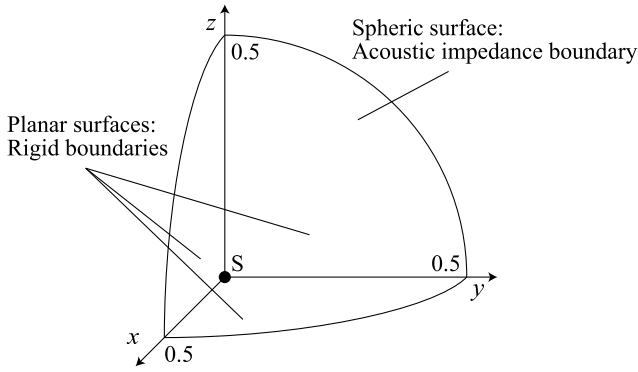


Fig. 10: Geometry of eighth-spherical computational domain.

いる。また同ケースでは時間刻みによる解析結果の差異も最小であり、Case A-CN が全般に最も良好な特性を示すと判断される。

5.3 三次元問題

5.3.1 解析条件

Fig. 10 に示す 1/8 球を解析対象とし、これを特性長 $l_c = 0.0125$ m の四面体非構造格子で格子分割した。格子分割にはオープンソースメッシュの Gmsh [6] を使用した。境界面は球面部のみ音響インピーダンス ρc の移流方程式型境界条件とし、それ以外は全て剛壁とした。 Δt は最大 Courant 数 0.99 に対応する 2.36×10^{-5} s とし、時刻 0.01 s までの解析を行った。初期条件は球中心部 (Fig. 10 の点 S) に半径 0.125 m の余弦波型パルスを与えた。

5.3.2 結果

Fig. 11 に解析結果を示す。予測子-修正子型の全ケース (Cases PC-C, PC-B, PC-CN) および Case U-CN では発散が見られた。残りのケースのうち、波面が球面状の吸音境界面に達した直後の 0.002 s 付近での減衰は風上型の 2 ケースより代数型が若干大きい。代数型の中でも Case A-C が最も大きな減衰を示しているが、他ケースとの差は概ね 0.5 dB と僅かである。

以上の一次元・二次元・三次元解析結果から、いずれの解析結果においても発散を生じず、かつ概ね最良の減衰を示す点で、総合的には Case A-CN が最善と判断される。

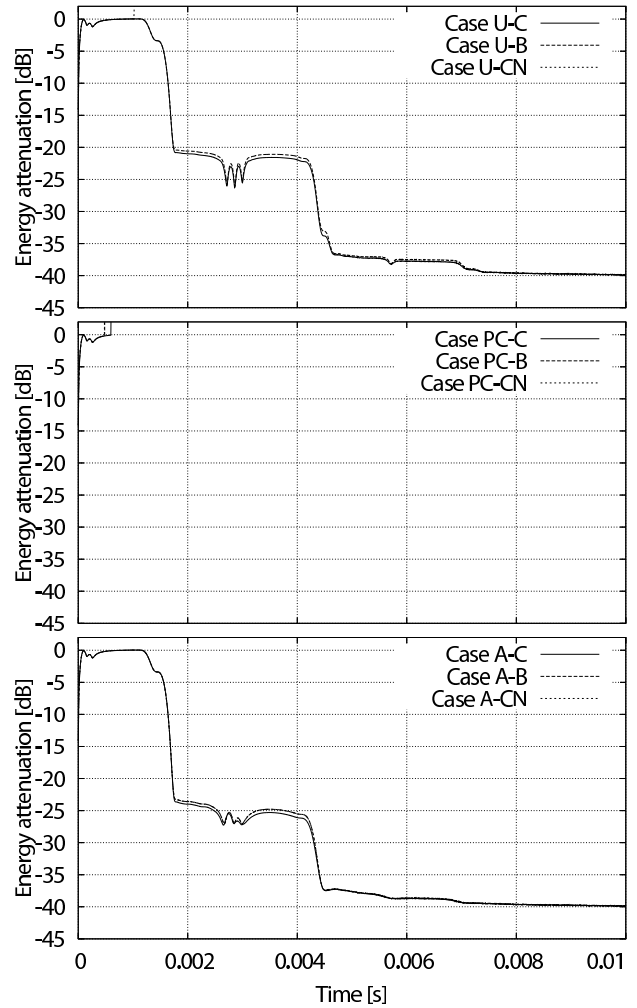


Fig. 11: Attenuation of total acoustic energy over time.

6 まとめ

前報 [1] で提案した時間領域有限体積法 (FVTD 法) を用いた非構造格子音場数値解析手法について、非直交補正手法の検討および実数法線方向音響インピーダンス境界条件について検討を行った。非直交格子補正手法は Jasak[2] の提案による 3 手法を検討したものの、有意な改善は見られれずさらなる検討が必要である。一方、音響インピーダンス境界条件については、Eq. (17) の代数型・Crank-Nicholson スキームの組合せ手法が最善との結果を得た。なお、FVTD 法は直交等間隔格子において FDTD 法と同一の解析結果を示し [1]、本スキームは FDTD 法にも適用可能であることから、FDTD 法においても同様の結果を得る可能性が高く、FDTD 法における確認も課題である。

謝辞

本研究の一部は、科学研究費補助金 基盤研究 (A) 19206062 (代表: 大鶴徹)、基盤研究 (B) 19360264 (代表: 酒井孝司) および若手研究 (B) 19760402 (代表: 大嶋拓也) の援助を受けた。また本研究遂行においては、オープンソースソフトウェアの OpenFOAM および Gmsh を使用し、OpenFOAM ユーザコミュニティ各位からは多大な教示を頂いた。記して感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 大嶋拓也, 今野雅. 時間領域有限体積法による非構造格子汎用音場数値解析コードの開発 (1) 定式化およびオープンソース数値計算ツールキット援用による核コードの実装. 日本音響学会建築音響研究会資料 AA2007-17, 2007.5.
- [2] Jasak, H. *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. PhD thesis, Imperial College, June 1996.
- [3] 日本建築学会音響数値解析小委員会. Benchmark platform on computational methods for architectural / environmental acoustics. <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/AIJ-BPCA/>.
- [4] J. H. ファーツィガー, M. ペリッチ, 小林敏雄, 谷口伸行, 坪倉誠訳. コンピュータによる流体力学. シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2003.
- [5] 内藤洋一, 横田孝俊, 坂本慎一, 橘秀樹. 差分法による開領域計算のための完全吸音境界の検討. 日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋季), Vol. II, pp. 751–752, 2000.9.
- [6] Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. <http://www.geuz.org/gmsh/>.